ISUPFERE - Mathématiques - 45 minutes
26 novembre 2016

EXERCICE 1

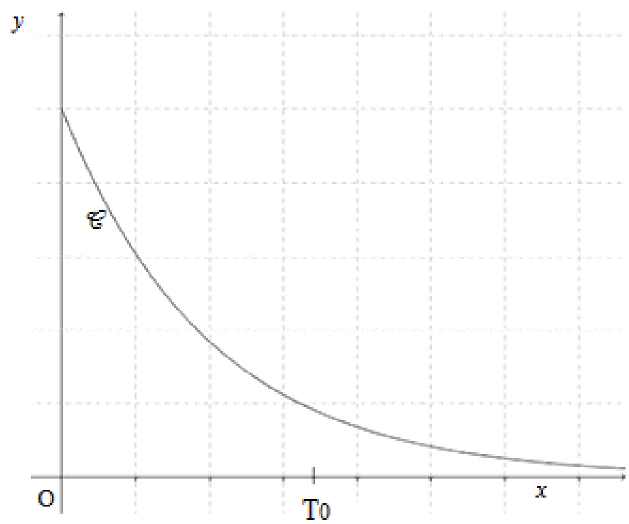
Une usine fabrique un composant électronique. La durée de vie T, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif). On note f la fonction densité de probabilité associée à la durée de vie T :

$$\text{pour tout nombre réel } x \geq 0 \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

La probabilité que la durée de vie T en années soit inférieure à T_0 ($T_0 \geq 0$ en années) s'exprime :

$$P(T \leq T_0) = \int_0^{T_0} f(x)\, dx$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f est donnée ci-dessous



1 - A quoi correspond graphiquement $P(T \leq T_0)$ où $T_0 > 0$? Le repérer sur la courbe $\mathscr{C}$

2 - Donner une primitive F(x) de la fonction f (x)

3 - Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

En déduire que $\lim_{t\to\infty} P(T \leq t) = 1$

Que vaut donc la surface située sous la courbe $\mathscr{C}$? (limitée par les 2 axes)

Représenter sur la figure la probabilité $P(T \geq T_0)$ que la durée de vie T en années soit supérieure à T_0

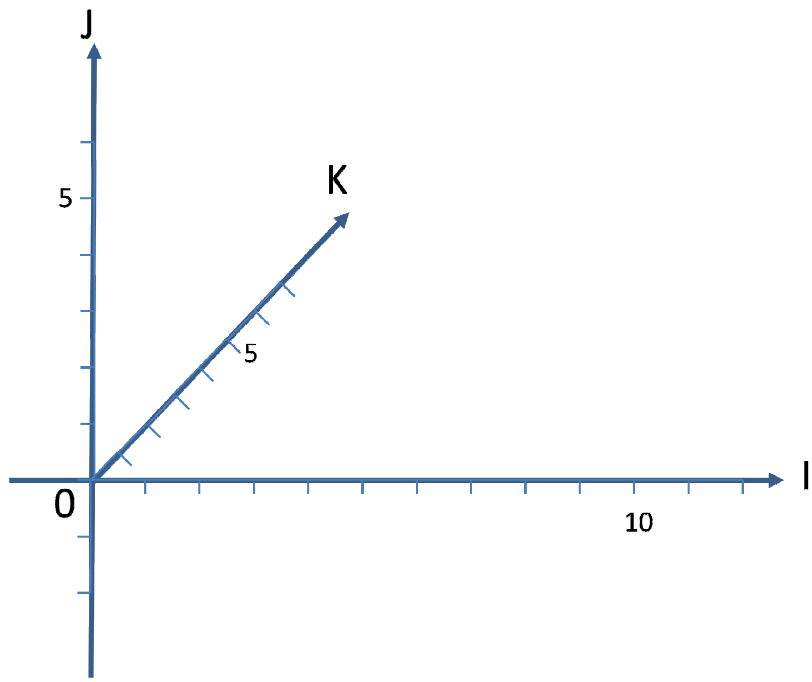
4 - On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ.

5 - Dans cette question on prend λ=0,099. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

EXERCICE 2

Dans l’espace rapporté à un repère orthonormé (O, I, J, K) on donne les points :

A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1)



1 - Placer les points sur le repère. ci dessus

2 - Les trois points A, B, C sont ils alignés ?

3 - Les trois points A, B, C forment ils un plan ?

Si oui, on rappelle que l'équation d'un plan est ax + by + cz = 1.

Donner alors l'équation du plan qui passe sachant qu'il passe par A, B, C

4 - Le vecteur $\vec{n}$ (0 ; 1 ; -1) est il normal au plan (ABC)

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 2π] par : $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$

1 - déterminer la dérivée f' de f

2 - On rappelle que sin (2x) = 2 sin(x).cos(x). En déduire que $f'(x) = -\sin(x)[1 + + 2\cos(x)]$

3 - résoudre dans [0, 2π] l'équation $\sin(x)[1 + + 2\cos(x)]$=0

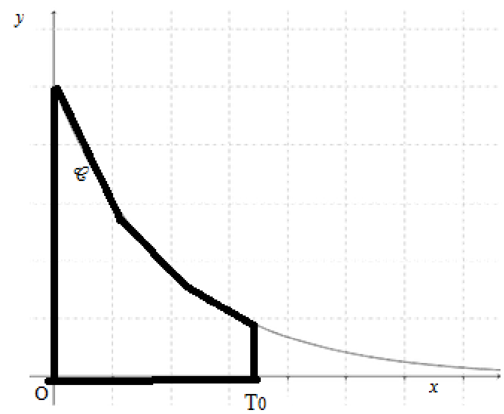
En combien de valeurs de x ∊ [0, 2π] la dérivée f(x) s'annule t-elle ?

ISUPFERE - Mathématiques
Corrigé

EXERCICE 1

1 - A quoi correspond graphiquement $P(T \leq T_0)$?

C'est l'aire de la surface comprise entre l'axe des x , l'axe des y, la droite $x = T_0$ et la courbe $\mathscr{C}$.



2 - Donner une primitive F(x) de la fonction f (x)

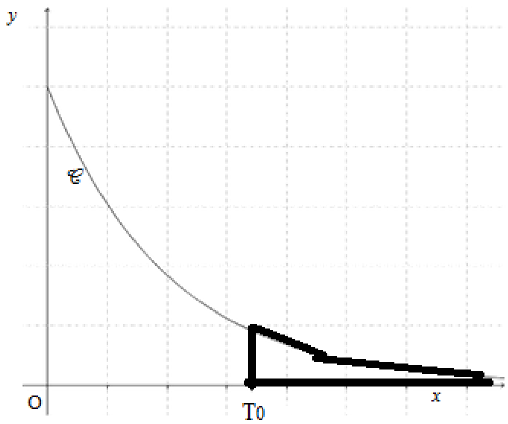
$$F(x) = -e^{-\lambda x}$$

3 - Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - \lambda e^{-\lambda t}$.

$$P(T \leq t) == \int_0^t f(x)dx = [F(x)]_0^t = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^{-\lambda 0}) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\lim_{t \to \infty} P(T \leq t) = \lim_{t \to \infty} (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - 0 = 1$$

Or c'est par définition : $\int_0^\infty f(x)dx$ donc la surface située sous la courbe $\mathscr{C}$. Cette surface vaut donc 1.
Représenter sur la figure la probabilité $P(T \geq T_0)$; C'est le complément à 1 de $P(T \leq T_0)$; la surface totale sous $\mathscr{C}$ valant 1.



4 - On suppose que P(T $\leq$7) = 0,5. Déterminer λ à 10^{-3} près.

$0,5 = 1 - e^{-7\lambda}$
Soit : **$\lambda = 0,099$**

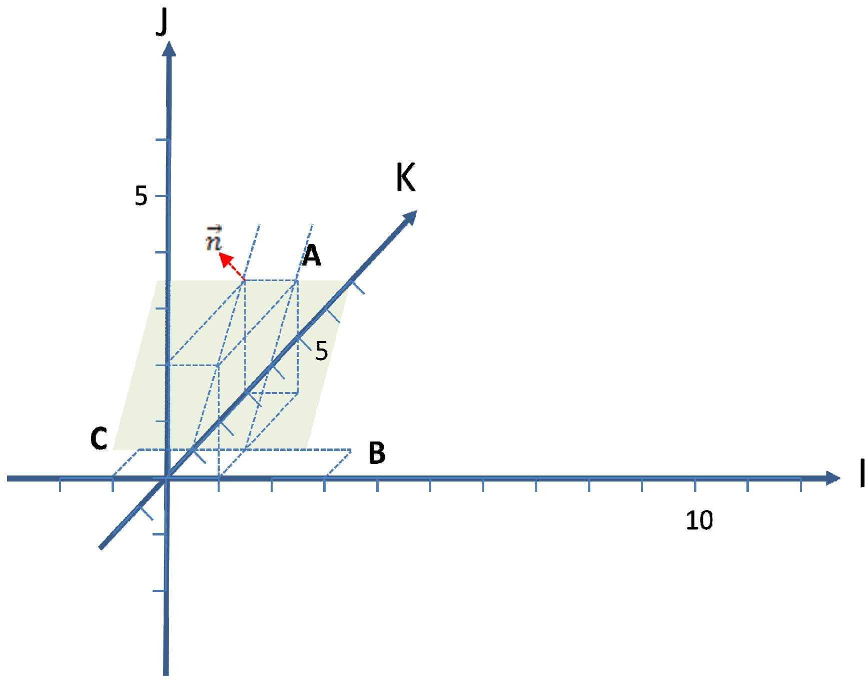
5 - Dans cette question on prend λ=0,099. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans (T supérieure à 5 ans - T $\geq$ 5).

$P\ (T \geq t) = 1 - P\ (T \leq t) = e^{-\lambda t}$

$P\ (T \geq 5) = e^{-5\lambda} = e^{-5*0.099} = 0,61$

EXERCICE 2

1 - Position des points



2 - Les trois points A, B, C sont ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}$ (2 ; -2 ; -2), et $\overrightarrow{AC}$ (-2 ; -2 ; -2). Les vecteurs ne sont pas colinéaires;

3 - Equation du plan :

ax + by + cz = 1

A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1)

a + 2b + 3c = 1
3a + c = 1
-a + c = 1

On déduit : c = 1 ; a = 0 ; b = -1

Equation du plan : -y + z = 1

4 - Le vecteur $\vec{n}$ (0 ; 1 ; -1) est il normal au plan (ABC) ?

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ = 2*0 + (-2)*1 + (-2)*(-1) = 0

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}$ = (-2)*0 + (-2)*1 + (-2)*(-1) = 0

$\vec{n}$ est donc orthogonal aux 2 vecteurs qui ne sont pas colinéaires.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 2π] par : $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$

1 - $f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x)$

2 - On remplace sin (2x) par 2 sin(x).cos(x).

$f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)[1 + 2\cos(x)]$

3 - Pour que le produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul donc :

$\sin(x) = 0$	$x = 0$; $x = \pi$; $x = 2\pi$
$\cos(x) = -\frac{1}{2}$	$x = 2\pi/3$; $x = 4\pi/3$

Il y a donc au total 5 valeurs de x pour laquelle la dérivée s'annule.